ENS PARIS (P')

Groupe D/S

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Notations et préliminaires

Il est recommandé aux candidats de lire attentivement cette partie qui contient des définitions et des énoncés qui ne seront pas rappelés dans la suite.

0.1. On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note $Gl_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on note ${}^tA$ la matrice transposée, $\overline{A}$ la matrice conjuguée et $\det(A)$ le déterminant de A. On note I_n la matrice identité. Dans tout le problème on identifie $M_n(\mathbb{C})$ à l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. Ainsi si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$, on note Ax l'image de x par l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

0.2. Soit H un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$. Un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^n$ est dit stable par H, si pour tout $h \in H$, pour tout $w \in W$, $hw \in W$. On dit que H est **irréductible** si $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ stables par H.

0.3. On dit que $g \in Gl_n(\mathbb{C})$ est une **pseudoréflexion** si le rang de $g - I_n$ est égal à 1.

0.4. Dans tout le problème on fixe un entier $n \geqslant 1$, et $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ tels que $a_j \neq b_k$ pour tout $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. A partir de la question II.3. on suppose de plus que pour tout j, k, $|a_j| = |b_k| = 1$.

0.5. On admettra le théorème de Cayley-Hamilton : si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et si $\det(tI_n - A) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i$, alors $\sum_{i=0}^{n} c_i A^i = 0$.

0.6. On rappelle qu'un produit scalaire sur un espace vectoriel complexe E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que :

i. pour x fixé dans E, l'application $y \to \varphi(x, y)$ est linéaire ;

ii. pour tout x et tout y dans E, $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$;

iii. pour tout x non nul dans E, $\varphi(x, x) > 0$.

Tournez la page S.V.P.

ENS PARIS (P')

PREMIÈRE PARTIE

I. Un sous-groupe H de $Gl_n(\mathbb{C})$ est dit de type $(\underline{a}, \underline{b})$ s'il existe $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in Gl_n(\mathbb{C})$ tels que :

(i) Le sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ engendré par $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ est égal à H :

(ii) $\tilde{A}\tilde{C}\tilde{B}^{-1} = I_n$:

(iii) $\tilde{C}$ est une pseudoréflexion :

(iv) $\det(t I_n - \tilde{A}) = \prod_{j=1}^{n} (t - a_j)$:

(v) $\det(t I_n - \tilde{B}) = \prod_{j=1}^{n} (t - b_j)$.

I.1. Soit $g \in Gl_n(\mathbb{C})$ une pseudoréflexion.

I.1.*a*. Démontrer que $\det(g)$ est une valeur propre de g.

I.1.*b*. Démontrer que $(g - I_n)(g - \det(g) I_n) = 0$.

I.2. Soient $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathbb{C}$ définis par $\prod_{j=1}^{n} (t - a_j) = t^n + A_1 t^{n-1} + ... + A_n$, $\prod_{j=1}^{n} (t - b_j) = t^n + B_1 t^{n-1} + ... + B_n$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -A_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -A_{n-2} \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -A_1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -B_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -B_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -B_{n-2} \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -B_1 \end{pmatrix}$$

Soit $H(\underline{a}, \underline{b})$ le sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ engendré par A et B. Démontrer que $H(\underline{a}, \underline{b})$ est de type $(\underline{a}, \underline{b})$.

I.3. Soit H un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ de type $(\underline{a}, \underline{b})$, soient $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ vérifiant les conditions (i) à (v).

I.3.*a*. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par H. Démontrer que l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

- la restriction de $\tilde{C}$ à W est l'identité ;
- $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\tilde{C}x - x \in W$.

I.3.*b*. Déduire de la question précédente, en utilisant 0.4 et la condition (ii), que H est irréductible. *Indication :* introduire un supplémentaire de W et utiliser des matrices blocs semblables à $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$.

I.4. Soit H un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ de type $(\underline{a}, \underline{b})$, soient $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ vérifiant les conditions (i) à (v).

I.4.*a*. Démontrer que $V = \mathrm{Ker}(\tilde{B} - \tilde{A})$ est de dimension $n - 1$. En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que pour tout $j \in \{0, ..., n-2\}$, $\tilde{A}^j x \in V$.

I.4.*b*. Soit x comme en I.4.*a*. Démontrer, en utilisant 0.5, que les $\tilde{A}^j x$, $j \in \{0, ..., n-1\}$, engendrent un sous-espace vectoriel Z stable par H. En déduire que les $\tilde{A}^j x$, $j \in \{0, ..., n-1\}$, forment une base de $\mathbb{C}^n$.

I.4.*c*. Démontrer qu'il existe $g \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que l'application $M \to g M g^{-1}$ établisse une bijection entre H et $H(\underline{a}, \underline{b})$.

ENS PARIS (P')

DEUXIÈME PARTIE

II.1. Soient P et $Q \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices ayant le même polynôme caractéristique. On suppose qu'il existe $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $v, Pv, \ldots, P^{n-1}v$ soient linéairement indépendants. On se propose de démontrer que $W = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : XP = QX\}$ est de dimension au moins égale à n.

II.1.*a*. On fixe $x \in \mathbb{C}^n$. Démontrer qu'il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ tel que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $XP^i v = Q^i x$.

II.1.*b*. Démontrer, en utilisant 0.5., que $XP^n v = Q^n x$, puis que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $(XP - QX)P^j v = 0$.

II.1.*c*. Démontrer que W est de dimension au moins n.

II.2. Soit $g \in M_n(\mathbb{C})$ de la forme :

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -g_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -g_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -g_{n-2} \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -g_1 \end{pmatrix}$$

avec $g_i \in \mathbb{C}$ et $g_n \neq 0$. Soit $X = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Montrer que si ${}^t\bar{g}Xg = X$, alors $x_{ij} = x_{i'j'}$ si $i - j = i' - j'$.

En déduire que l'ensemble des solutions de ${}^t\bar{g}Xg = X$ est contenu dans un espace vectoriel de dimension $2n - 1$ indépendant de g.

Dans toute la suite du problème on suppose que, pour tout j, k, $|a_j| = |b_k| = 1$.

II.3. Soient A et B comme définis en I.2.

II.3.*a*. Démontrer qu'il existe une matrice non nulle $F = (F_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ telle que :

(*) $\qquad {}^t\bar{A}FA = F \qquad$ et $\qquad {}^t\bar{B}FB = F.$

On pourra utiliser II.1.

II.3.*b*. Démontrer qu'il existe F non nulle vérifiant (*) telle que ${}^t\bar{F} = F$.

Dans toute la suite du problème on fixe F non nulle vérifiant (*) telle que ${}^t\bar{F} = F$.

II.4. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose :

$$\varphi(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} F_{ij} \bar{x}_i y_j .$$

Vérifier que $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$, puis démontrer que, pour tout $h \in H(\underline{a}, \underline{b})$, $\varphi(hx, hy) = \varphi(x, y)$. En déduire que, si $x \neq 0$, il existe y tel que $\varphi(x, y) \neq 0$. On pourra utiliser I.3.*b*.

II.5. Soit $G \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 1. Démontrer qu'il existe des vecteurs non nuls v et w dans $\mathbb{C}^n$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $Gx = \varphi(v, x)\, w$.

Tournez la page S.V.P.

ENS PARIS (P')

II.6. Soient $c = b_1 \dots b_n a_1^{-1} \dots a_n^{-1}$ et ζ vérifiant $c\zeta^2 = -1$. Soit $D = \zeta(A^{-1}B - I_n)$.

II.6.*a.* Démontrer que $D = \zeta^{-1}(B^{-1}A - I_n)$.

II.6.*b.* Démontrer que ${}^t\overline{D}F = FD$.

II.6.*c.* Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{C}^n$, on a $\varphi(D(x), y) = \varphi(x, D(y))$.

II.6.*d.* Démontrer qu'il existe un vecteur non nul u appartenant à $\mathbb{C}^n$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $D(x) = \varepsilon\varphi(u, x)u$.

TROISIÈME PARTIE

III. On écrit $a_j = \exp 2i\pi\alpha_j$, $b_j = \exp 2i\pi\beta_j$, avec $\alpha_j, \beta_j \in [0, 1[$. On supposera dans la suite du problème que les a_j et b_j sont numérotés de telle sorte que :

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n < 1 \qquad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \beta_n < 1.$$

Pour $j \in \{1, \dots, n\}$ on note m_j le cardinal de $\{k; \beta_k < \alpha_j\}$.

On note E_+ (resp. E_-) l'ensemble des sous-espaces vectoriels E de $\mathbb{C}^n$ tels que la restriction de φ (resp. $-\varphi$) à E soit un produit scalaire. On note n_+ (resp. n_-) la borne supérieure des dimensions des éléments de E_+ (resp. E_-). On pose $\sigma(\varphi) = |n_+ - n_-|$.

III.1. On suppose que pour $j \neq k$, $a_j \neq a_k$. On se propose de démontrer que :

$$\sigma(\varphi) = \left| \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+m_j} \right|.$$

Soit u un vecteur donné par II.6.*d.*

III.1.*a.* Démontrer qu'il est possible d'écrire $u = u_1 + \dots + u_n$ avec $Au_j = a_j u_j$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

III.1.*b.* Démontrer que $\varphi(u_j, u_k) = 0$ pour $j \neq k$.

III.1.*c.* Démontrer que, lorsque chaque membre est défini, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} (b_k - t)(a_k - t)^{-1} = \det(I_n + \zeta^{-1} D(I_n - tA^{-1})^{-1}).$$

III.1.*d.* Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe une forme linéaire $\ell : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ et un vecteur $w \in \mathbb{C}^n$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $Mx = \ell(x)w$. Démontrer que $\det(I_n + M) = 1 + \ell(w)$.

III.1.*e.* Démontrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} (b_k - t)(a_k - t)^{-1} = 1 + \varepsilon\zeta^{-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a_j - t} \varphi(u_j, u_j).$$

III.1.*f.* Déduire de III.1.*e.* une formule explicite pour $\varphi(u_j, u_j)$ en fonction des α_k et β_k.

III.1.*g.* Démontrer que $\sigma(\varphi) = \left| \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+m_j} \right|$.

III.2. Indiquer brièvement pourquoi III.1.*g.* reste valide sans l'hypothèse $a_j \neq a_k$ pour $j \neq k$.

III.3. Soit H un sous-groupe fini de $Gl_n(\mathbb{C})$. Démontrer qu'il existe un produit scalaire ψ sur $\mathbb{C}^n$ tel que, quels que soient $h \in H$, $x, y \in \mathbb{C}^n$, $\psi(h(x), h(y)) = \psi(x, y)$.

Indication : construire ψ à partir d'un produit scalaire arbitraire.

III.4. Démontrer que si $H(\underline{a}, \underline{b})$ est fini, alors $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n$ ou $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \cdots < \beta_n < \alpha_n$.